

№ 6.13

Волна H-типа или иначе ТЕ-волна (поле E - ортогонально оси волновода, поле H имеет осевую компоненту) распространяется в прямоугольном волновод в направлении оси X . В плоскости поперечного сечения YOZ размер волновода по оси Y равен a , по оси Z - b . Получить волновое уравнение для продольной компоненты магн. поля H_x . Вывести дисперсионное уравнение и представить его в виде $K_x = K_x(\omega, K_y, K_z)$, где $K_y = \frac{m\pi}{a}$ и $K_z = \frac{n\pi}{b}$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Определить граничную частоту ω_{mn} и граничную длину волны λ_{mn} . Найти фазовую и групповую скорости волны.

Решение:

Волновое ур-е для магн. поля имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0, \text{ где } H = H_x(y, z, t) \quad (1)$$

Стенки волновода идеально проводящие $\Rightarrow H(y, 0, t) = H(y, b, t) = 0$

Ищем решение в виде $H = H_0 \cos k_z z e^{i(\omega t - k_y y)}$, $k_z b = \pi n$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \Rightarrow H_y = H_z = 0 \quad (2)$$

$$\text{Подставим (2) в (1)} \Rightarrow (-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) H = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$$

Э/м волна распространяется в волновод без затухания $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \geq 0 \Rightarrow \omega \geq \frac{\pi c}{b} n$$

Соответственно, при заданном n , характеризующем форму волны в напр. оси Z , находится граничная частота.

(при $n=1$: $\omega_0 = \frac{\pi c}{b} \Rightarrow \left\{ \lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} \right\} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 2b$),

т.е. в рассматриваемом волноводе могут распр-ся только волны, длина которых меньше удвоенного поперечного сечения волновода

$$H = H_0 \cos(k_z z) \cos(k_y y) e^{i(\omega t - k_x x)}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2} - \frac{\pi^2 m^2}{a^2}} \Rightarrow \omega \geq \frac{\pi c}{b} n + \frac{\pi c}{a} m$$

Фазовая скорость найдем из ур-ния:

$$\omega t - k_y y = \text{const} \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2}}} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2}}} > c,$$

т.е. фазовая скорость элм волны в волноводе > скорости света.

Преобразуем $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}} \Rightarrow$ длина волны $\lambda_0 =$

$$= v_\phi T = \frac{cT}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}} > \lambda = cT$$

Групповая скорость $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$, т.е. групповая скорость всегда < ск-ти света

$v_\phi v_g = c^2$



$\omega_0 = \frac{\pi c}{b}$